Problema 3

Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în submulţimi astfel:
{1},{3,5},{7,9,11},{13,15,17,19},...

a) Aflaţi care este primul număr din cea de a 2014-a submulţime,
b) Există o submulţime de acest tip care începe cu 2013? Justificaţi răspunsul.

E:14720, GM 10/2014, Relu Ciupea, Oltenița

(1p)

Soluție. Observăm că $3 = 2 \cdot 1 + 1$ (2 este numărul de ordine al submulţimii), (1p)
$7 = 3 \cdot 2 + 1$ (3 este numărul de ordine al submulţimii), $13 = 4 \cdot 3 + 1$ (4 este numărul de ordine al submulţimii). Deducem că submulţimea de pe locul n are primul element $n(n-1)+1$. Acum putem răspunde la cele două întrebări. (1p) (1p) (1p)

a) Primul element al celei de a 2014-a submulţimi este $2014 \cdot 2013 + 1 = 4054183$. (1p)

b) Pentru ca o submulţime să înceapă cu 2013 trebuie să existe un n natural astfel încât $n(n-1)+1 = 2013$, adică $n(n-1) = 2012$. Cum $45 \cdot 44 = 1980 < 2012$ (1p) și $46 \cdot 45 = 2070 > 2012$, rezultă că nu există o submulţime care să înceapă cu 2013. (1p)